Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 janvier 2022

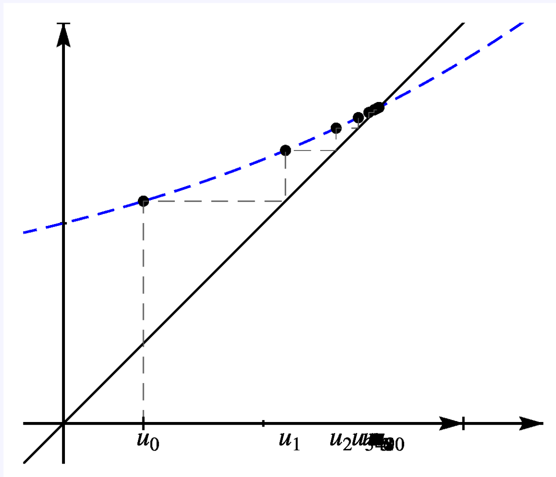
Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère l'application f et la suite (u_n) définies par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x}{x+2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 \in \left]0,1\right[\\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f\left(u_n\right) \end{cases} .$$

1. *Montrer que l'intervalle $\left]0,1\right[$ est stable par f.*
2. *En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left]0,1\right[$ (et donc que (u_n) est bien définie).*
3. *Montrer que f admet un unique point fixe α dans l'intervalle $\left]0,1\right[$.*
4. *Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{2e}{9}\right)^n$.*
5. *Conclure.*
6. *Donner une valeur approchée de α à 10^-3 près.*

Solution :



1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de telles fonctions. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{e^x(1+x)}{(2+x)^2}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0) = 1/2$ et que $f(1) = e/3 < 1$ on en déduit que $f(]0,1[) \subset]0,1[$.
2. Par définition, $u_0 \in]0,1[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in]0,1[$. Comme $]0,1[$ est stable par f, il vient que $u_{n+1} = f(u_n) \in]0,1[$. On prouve ainsi la propriété par récurrence. On a de plus clairement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -2$ donc (u_n) est bien définie.
3. Introduisons la fonction

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x - x(x+2) \end{array} \right. .$$

Par opérations sur les fonctions continues, θ est continue sur $[0,1]$. De plus, $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = e - 3 < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, θ admet un zéro sur $]0,1[$. On montre facilement que pour tout $x \in [0,1]$, $\theta'(x) = e^x - 2 - 2x$ et $\theta''(x) = e^x - 2$. Donc sur $[0,1]$, θ'' est strictement négative et θ' est strictement décroissante. Comme $\theta'(0) = -1$, sur $[0,1]$, θ' est strictement négative et θ est strictement décroissante. On peut alors affirmer que le zéro de f sur $]0,1[$ est unique. On le note α.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est continue sur $[u_{n-1}, \alpha]$ et dérivable sur $]u_{n-1}, \alpha[$. D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\begin{aligned} |u_n - \alpha| &\leqslant \sup_{x \in]0,1[} |f'(x)| \, |u_{n-1} - \alpha| \\ &\leqslant \frac{2e}{9} |u_{n-1} - \alpha| . \end{aligned}$$

car f' est strictement croissante sur $[0,1]$. Par une récurrence facile, on en déduit que

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2e}{9}\right)^n |u_0 - \alpha| .$$

Mais comme $u_0, \alpha \in]0,1[$, on a : $|u_0 - \alpha| \leqslant 1$ et on obtient l'inégalité proposée.
5. On déduit facilement de cette dernière inégalité et du théorème des gendarmes que $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha}$.
6. On utilise l'inégalité précédente. On cherche pour quels valeurs de n, $(2e/9)^n \leqslant 10^{-3}$. On passe au logarithme et on trouve $n \geqslant \dfrac{3 \ln 10}{2 \ln 3 - \ln 2 - 1} \simeq 13,7$. Donc il suffit de calculer u_{14} pour connaître α à la précision requise. On trouve $\alpha \simeq 0.789$ à 10^{-3} près. Ceci est valable quelque soit la valeur prise au départ pour u_0 !

Références