

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

28 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

On considère l'application f et la suite (u_n) définies par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x}{x+2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 \in]0, 1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} .$$

1. Montrer que l'intervalle $]0, 1[$ est stable par f .
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1[$ (et donc que (u_n) est bien définie).
3. Montrer que f admet un unique point fixe α dans l'intervalle $]0, 1[$.
4. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2e}{9}\right)^n$.
5. Conclure.
6. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Références