Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

[2], ,

[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

23 mars 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère l'équation différentielle :

$$(E): \quad (1-x^2)y' + xy + (x^2-1) = 0$$

1. *Déterminer toutes les solutions de (E) sur $]-1,1[$.*
2. *Existe-t-il une solution sur $I =]-1,1]$? (On admettra que $\pi/2 - \arcsin x \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$).*

Solution : *La quantité (x^2-1) ne s'annule pas sur $I_1 =]-1,1[$. Résolvons l'équation d'abord sur I_1. La solution générale de l'équation homogène est*

$$y_0(x) = C\sqrt{1-x^2} \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

En utilisant la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de la forme $\tilde{}y(x) = C(x)\sqrt{1-x^2}$. Il suffit que $C'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et donc par exemple $C(x) = \arcsin(x)$. La solution générale s'écrit donc

$$y(x) = (\arcsin x + C)\sqrt{1-x^2}.$$

Soit maintenant y une solution sur I. Pour que l'équation soit vérifiée en 1, il faut que $y(1) = 0$. Comme $\forall x < 1$, $y(x) = (\arcsin x + C)\sqrt{1-x^2}$, cette fonction se prolonge par continuité en 1 avec $y(1) = 0$. Étudions la dérivabilité en 1 de la fonction ainsi prolongée. Puisque y vérifie l'équation différentielle, on en tire que $\forall x < 1$,

$$y'(x) = 1 - x\frac{\arcsin x + C}{\sqrt{1-x^2}}$$

*Pour que y' ait une limite finie en 1, il faut que $C = -\arcsin 1 = -\dfrac{\pi}{2}$. En effet, si $C \neq -\dfrac{\pi}{2}$, alors $y'(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \infty$ et d'après la proposition **??** page **??**, y ne serait pas dérivable en 1 ?*

Si $C = -\dfrac{\pi}{2}$, *alors*

$$y'(x) = 1 - x\frac{\arcsin x - \pi/2}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow[x\to 1]{} 2 \text{ car } \frac{\arcsin x - \pi/2}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{\sqrt{2\,(1-x)}}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} \xrightarrow[x\to 1^-]{} -1$$

et donc d'après le théorème **??**, y *est dérivable en* 1 *avec* $y'(1) = 2$. *Réciproquement, on vérifie que la fonction*

$$\boxed{x \mapsto \left(\arcsin x - \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{1-x^2}}$$

est solution de (E) *sur* $]-1,1]$. *C'est la seule solution de cette équation sur* $]-1,1]$.

Références