Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

30 novembre 2022

Exercice 0.1 ★★★ **Pas de titre**

Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[a,b]$ avec $a<b$. Montrez qu'il existe un réel $c\in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(c).$$

Solution : *Définissons la fonction auxiliaire suivante :*

$$\varphi:\left\{\begin{array}{ccc}[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \dfrac{f(t)+f(a)}{2}-f\left(\dfrac{a+t}{2}\right)-\dfrac{(t-a)^2}{8}K\end{array}\right.$$

où K est une constante choisie telle que $\varphi(b)=0$ (c'est possible car $a<b$). Puisque la fonction φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et que $\varphi(a)=\varphi(b)=0$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_1\in]a,b[$ tel que $\varphi'(c_1)=0$. On a donc

$$\frac{f'(c_1)}{2}-\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+c_1}{2}\right)=K\frac{c_1-a}{4}.$$

Appliquons ensuite le théorème des accroissements finis entre les points $\dfrac{a+c_1}{2}$ et c_1. Comme la fonction f' est continue sur $[(a+c_1)/2,c_1]$ et dérivable sur $](a+c_1)/2,c_1[$, il existe un réel $c\in](a+c_1)/2,c_1[$ tel que

$$f'(c_1)-f'\left(\frac{a+c_1}{2}\right)=\left(c_1-\frac{a+c_1}{2}\right)f''(c).$$

On trouve donc que

$$\frac{c_1-a}{4}f''(c)=\frac{K(c_1-a)}{4}$$

et donc que $K=f''(c)$. Puisque la constante K a été choisie pour que $\varphi(b)=0$, on trouve donc que

$$0=\varphi(b)=\frac{f(b)+f(a)}{2}-f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{(b-a)^2}{8}f''(c).$$

Références