Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ **Pas de titre**

Soit un réel $a \in \mathbb{R}$ *et une fonction* $f : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ *dérivable sur* $[a, +\infty[$ *telle que* $f'(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

1. *Montrez que* $\dfrac{f(t)}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.
2. *En déduire ensuite que si* $f'(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f(t)}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} l$.

Solution :

1. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Comme* $f'(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, *il existe* $A_1 > 0$ *tel que* $\forall x \geqslant A_1$, $|f'(x)| \leqslant \varepsilon$. *Soit alors* $x \geqslant A_1$. *En utilisant le théorème des accroissements finis entre* A_1 *et* x, *on peut affirmer qu'il existe* $c_x \in]A_1, x[$ *tel que* $f(x) = f(A_1) + f'(c_x)(x - A_1)$. *Alors*

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(A_1)}{x} + f'(c_x)\left(1 - \frac{A_1}{x}\right)$$

Comme $\dfrac{f(A_1)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, *il existe* $A_2 > 0$ *tel que* $\forall x \geqslant A_2$, $\left|\dfrac{f(A_1)}{x}\right| \leqslant \varepsilon$.
Comme $1 - \dfrac{A_1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$, *il existe* $A_3 > 0$ *tel que* $\forall x \geqslant A_3$, $\left|1 - \dfrac{A_1}{x}\right| \leqslant 1$.
Posons $A = \max(A_1, A_2, A_3)$.
Si $x \geqslant A$, *on obtient l'encadrement suivant :*

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \left|\frac{f(A_1)}{x}\right| + |f'(c_x)|\left|1 - \frac{A_1}{x}\right| \leqslant \varepsilon + \varepsilon \times 1 \leqslant 2\varepsilon$$

Il suffit alors de reprendre la démonstration avec au départ $\widetilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{2}$ *pour avoir* $|f(x)/x| \leqslant \varepsilon$ *si* $x \geqslant A$. *On prouve ainsi que* $f(x)/x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

2. *Définissons une fonction g par $g(x) = f(x) - lx$. Elle est dérivable sur $[a, +\infty[$ et $\forall x \geqslant 0$, $g'(x) = f'(x) - l \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Donc d'après la première partie, $\dfrac{g(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. On trouve alors que $\dfrac{f(x)}{x} - l \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ ce qui prouve que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$.*

Références