Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit une fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *continue, ne s'annulant pas sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$. *Montrez qu'il existe* $c \in]a, b[$ *tel que*

$$\frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

Solution : *Introduisons la fonction* $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln|f(x)| \end{array} \right.$. *Comme* f *ne s'annule pas sur* $[a, b]$, θ *est bien définie et continue sur* $[a, b]$. *Par opérations sur les fonctions dérivables,* θ *est dérivable sur* $]a, b[$. *On applique le théorème des accroissements finis : il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $\theta(b) - \theta(a) = \theta'(c)(b - a)$ *ce qui amène* $\ln|f(a)| - \ln|f(b)| = (a - b) f'(c) / f(c)$. *On obtient la formule proposée en passant à l'exponentielle :* $\dfrac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)f'(c)/f(c)}$ *(on peut supprimer les valeurs absolues car* $f(a)$ *et* $f(b)$ *sont de même signe.*

Références