Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit une fonction $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$. *On suppose qu'il existe* $k > 0$ *et* $\alpha > 1$ *tels que* $\forall (x,y) \in]0,1[^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|^\alpha.$$

Montrer que la fonction f *est constante.*

Solution : *Soient* $x \in]0,1[$. *Pour* $y \in]0,1[$ *tel que* $y \neq x$. *On a* $|\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}| \leqslant k\,|y-x|^{\alpha-1}$ *et comme* $\alpha - 1 > 0$, $\theta(y) = |y-x|^{\alpha-1} \xrightarrow[y \to x]{} 0$. *D'après le théorème de majoration, on en déduit que le taux d'accroissement possède une limite nulle lorsque* $y \to x$. *On a donc montré que la fonction* f *est dérivable et de dérivée non nulle en tout point* $x \in]0,1[$. *La fonction* f *est donc constante sur l'intervalle* $]0,1[$.

Références