Racines primitives de l'unité

Alain Soyeur[1] and Emmanuel Vieillard-Baron[2]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Racines primitives de l'unité***

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ et soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. On dit que ω est une racine primitive n-ième de l'unité si et seulement si toute racine n-ième de l'unité s'écrit comme une puissance de ω. Autrement dit :

$$\mathbb{U}_n = \left\{\omega^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que $\omega = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une racine primitive n-ième de l'unité si et seulement si k est premier avec n.

Solution :

— *Par contraposée, si k et n ne sont pas premiers entre eux, alors ils admettent un diviseur commun $d \neq \pm 1$: $n = dn'$ et $k = dk'$ avec $n', k' \in \mathbb{N}$. En particulier, $w^{n'} = \left(e^{\frac{2i\pi k' d}{n}}\right)^{n'} = 1$ et*

$$\{w^r \mid r \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{U}_{n'} \subsetneq \mathbb{U}_n$$

car $n' < n$. On en déduit que ω n'est pas primitive.

— *Si k et n sont premiers entre eux alors d'après le théorème de Bézout, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $ak + bn = 1$. Donc pour tout $l \in [\![0, n-1]\!]$,*

$$\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^{al} = e^{\frac{2ikal\pi}{n}} = e^{\frac{2i(1-bn)l\pi}{n}} = e^{\frac{2il\pi}{n}}$$

et ω est bien primitive.

Références