# Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

28 novembre 2022

***Exercice 0.1*** ★★★ ***Pas de titre***

*Soit $f \in \mathcal{C}^3([a,b])$. Montrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que :*

$$f(b)-f(a)=\frac{b-a}{2}\Big[f'(a)+f'(b)\Big]-\frac{(b-a)^3}{12}f^{(3)}(c).$$

***Solution :*** *Considérons la fonction auxiliaire*

$$\varphi(t)=f(t)-f(a)-\frac{t-a}{2}\Big[f'(a)+f'(t)\Big]+\frac{(t-a)^3}{12}K$$

*définie pour tout $t \in [a,b]$ où $K$ est une constante choisie en sorte que $\varphi(b)=0$. La fonction $\varphi$ s'annule aussi en $a$, est dérivable sur $[a,b]$ par opération sur les fonctions dérivables. On applique alors le théorème de Rolle. Il existe $c' \in ]a,b[$ tel que $\varphi'(c')=0$. Par ailleurs, pour tout $t \in [a,b]$, on a :*

$$\varphi'(t)=\frac{1}{2}\left(f'(t)-f'(a)\right)-\frac{t-a}{2}f''(t)+\frac{(t-a)^2}{4}K.$$

*On remarque sur $\varphi'$ s'annule aussi en $a$ et qu'elle est dérivable sur $[a,c']$. On applique alors une nouvelle fois le théorème de Rolle. Il existe $c \in ]a,c'[$ tel que $\varphi''(c)=0$. Mais pour tout $t \in [a,b]$,*

$$\varphi''(t)=\frac{t-a}{2}\left(K-f^{(3)}(t)\right).$$

*Comme $\varphi''(c)=0$, il vient que $K=f^{(3)}(c)$ et l'égalité est prouvée.*

## Références