Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit $f \in \mathcal{C}^3([a,b])$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2}\Big[f'(a) + f'(b)\Big] - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(3)}(c).$$

Solution : *Considérons la fonction auxiliaire*

$$\varphi(t) = f(t) - f(a) - \frac{t-a}{2}\Big[f'(a) + f'(t)\Big] + \frac{(t-a)^3}{12} K$$

définie pour tout $t \in [a,b]$ où K est une constante choisie en sorte que $\varphi(b) = 0$. La fonction φ s'annule aussi en a, est dérivable sur $[a,b]$ par opération sur les fonctions dérivables. On applique alors le théorème de Rolle. Il existe $c' \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c') = 0$. Par ailleurs, pour tout $t \in [a,b]$, on a :

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2}\left(f'(t) - f'(a)\right) - \frac{t-a}{2} f''(t) + \frac{(t-a)^2}{4} K.$$

On remarque sur φ' s'annule aussi en a et qu'elle est dérivable sur $[a,c']$. On applique alors une nouvelle fois le théorème de Rolle. Il existe $c \in]a,c'[$ tel que $\varphi''(c) = 0$. Mais pour tout $t \in [a,b]$,

$$\varphi''(t) = \frac{t-a}{2}\left(K - f^{(3)}(t)\right).$$

Comme $\varphi''(c) = 0$, il vient que $K = f^{(3)}(c)$ et l'égalité est prouvée.

Références