Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ sur le segment $[a,b]$. On suppose qu'il existe trois points $a < a_1 < a_2 < a_3 < b$ tels que $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = 0$. Soit un réel $x \in [a,b]$. Montrez qu'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$f(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{6} f^{(3)}(c).$$

Solution : *Définissons la fonction auxiliaire φ suivante :*

$$\varphi : \begin{cases} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) - \dfrac{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)}{6} K \end{cases}$$

où K est une constante choisie telle que $\varphi(x) = 0$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur le segment $[a,b]$ comme somme de la fonction f et d'une fonction polynomiale. Comme $\varphi(a_1) = \varphi(a_2) = \varphi(a_3) = \varphi(x) = 0$, en appliquant le théorème de Rolle trois fois, on montre qu'il existe trois réels $b_1, b_2, b_3 \in]a,b[$ tels que $\varphi'(b_1) = \varphi'(b_2) = \varphi'(b_3) = 0$. En appliquant ensuite le théorème de Rolle à la fonction φ' deux fois, on montre l'existence de deux réels $c_1, c_2 \in]a,b[$ tels que $\varphi''(c_1) = \varphi''(c_2) = 0$ et en réappliquant le théorème de Rolle entre les points c_1 et c_2, on montre l'existence d'un réel $c \in]a,b[$ tel que $\varphi^{(3)}(c) = 0$. Mais on calcule pour $t \in [a,b]$,

$$\varphi^{(3)}(t) = f^{(3)}(t) - K$$

et donc $K = f^{(3)}(c)$. Comme la constante K a été choisie pour que $\varphi(x) = 0$, en écrivant cette condition et en remplaçant K par $f^{(3)}(c)$, on obtient l'égalité de l'énoncé.

Références