Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ **Pas de titre**

Soit I un intervalle et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I. Soit $(a, b, c) \in I^3$ trois points de I avec $a < b < c$. Montrer qu'il existe $d \in I$ tel que

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{f''(d)}{2}$$

Solution : *Considérons la fonction $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}$ définie par*

$$\varphi(x) = (x-b)f(a) + (a-x)f(b) + (b-a)f(x) - \frac{(a-b)(b-x)(x-a)}{2}K$$

où K est une constante choisie de telle sorte que $\varphi(c) = 0$. Comme φ est deux fois dérivable sur I, φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Par conséquent, d'après le théorème de Rolle, il existe $d_1 \in]a, b[$ tel que $\varphi'(d_1) = 0$. De même, comme $\varphi(b) = \varphi(c) = 0$, il existe $d_2 \in]b, c[$ tel que $\varphi'(d_2) = 0$. Mais pour tout $x \in I$, on calcule

$$\varphi'(x) = f(a) - f(b) + (b-a)f'(x) + (a-b)Kx - \frac{(a-b)(a+b)}{2}K$$

et comme φ' est continue sur $[d_1, d_2]$, dérivable sur $]d_1, d_2[$ et $\varphi'(d_1) = \varphi'(d_2) = 0$, d'après le théorème de Rolle, il existe $d \in]d_1, d_2[$ tel que $\varphi''(d) = 0$. Mais $\forall x \in I$,

$$\varphi''(x) = (b-a)f''(x) + (a-b)K$$

et par conséquent, $K = f''(d)$. Comme $\varphi(c) = 0$, en reportant cette valeur pour K, on trouve que

$$(c-b)f(a) + (a-c)f(b) + (b-a)f(c) = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2}f''(d)$$

et en divisant cette égalité par $(a-b)(b-c)(c-a)$, on trouve le résultat.

Références