Règle de l'Hospital

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Règle de l'Hospital**

1. *Soient a, b deux réels distincts et soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

2. *En déduire la **règle de l'Hospital** : soient $\alpha > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $V =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et $f, g : V \to \mathbb{R}$ tels que :*

   (a) *les fonctions f et g sont continues sur V.*
   (b) *les fonctions f et g sont dérivables sur $V \setminus \{x_0\}$.*
   (c) *$f(x_0) = g(x_0) = 0$.*
   (d) *la fonction g ne s'annule pas sur $V \setminus \{x_0\}$.*
   (e) *$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$.*

   Alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

3. *En déduire les limites suivantes*

   (a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.
   (b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.
   (c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x) - x}{x^2}$.
   (d) $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) \operatorname{cotan} x$.

4. *Une généralisation de la proposition **??** page **??** :*

   (a) *Déduire de la règle de l'Hospital que si f est une application de classe $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage de 0 tel que $f''(0) \neq 0$ alors*

$$f(x) - (f(0) + xf'(0)) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{f''(0)}{2} x^2$$

(b) *Généraliser ce résultat à une application de f classe $\mathcal{C}^n$ dans un voisinage de 0 telle que $f^{(n)}(0) \neq 0$.*

Solution :

1. *Introduisons la fonction*

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)(g(b)-g(a)) - g(x)(f(b)-f(a)) \end{array} \right. .$$

On montre que θ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ en utilisant les théorèmes d'opérations. On vérifie par un calcul simple que $\theta(a) = \theta(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle : il existe $c \in]a,b[$ tel que $\theta'(c) = f'(c)(g(b)-g(a)) - g'(c)(f(b)-f(a)) = 0$ d'où le résultat.

2. *Pour tout $x \in V \setminus \{x_0\}$, f et g sont continues sur $[x,x_0]$ et dérivables sur $[x,x_0[$. D'après le résultat de la première question appliqué au segment $[x,x_0]$, il existe $c_x \in]x,x_0[$ tel que*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Notons que ce dernier quotient est défini, d'après l'hypothèse 5 si on prend x suffisamment proche de x_0. Mais $c_x \xrightarrow[x\to x_0]{} x_0$ et $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} l$ donc $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

3. *On vérifie que les fonctions f et g suivantes vérifient les hypothèses de la règle de l'Hospital sur un voisinage adéquat V de 0 puis on applique cette règle.*

   (a) *On pose $f : x \mapsto 1-\cos x$ et $g : x \mapsto x^2$. Ces deux fonctions sont définies sur $V = \mathbb{R}$. Pour $x \in V$, on a : $f'(x) = \sin x$, $g'(x) = 2x$ et pour $x \neq 0$, $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\sin x}{2x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}}$.*

   (b) *On pose $f : x \mapsto x - \sin x$ et $g : x \mapsto x^3$. Ces deux fonctions sont définies sur $V = \mathbb{R}$. Pour $x \in V$, on a : $f'(x) = 1-\cos x$, $g'(x) = 3x^2$ et pour $x \neq 0$, $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{1-\cos x}{3x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{3x^2} = \dfrac{1}{6}$ donc $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3} = \dfrac{1}{6}}$.*

   (c) *On pose $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ et $g : x \mapsto x^2$. Ces deux fonctions sont définies sur $V =]-1,+\infty[$. Pour $x \in V$, on a : $f'(x) = -\dfrac{x}{1+x}$, $g'(x) = 2x$ et $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\dfrac{x}{2(1+x)x} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}}$.*

   (d) *On pose $f : x \mapsto 1-\cos x$ et $g : x \mapsto \tan x$. Ces deux fonctions sont définies sur $V = \mathbb{R}$. Pour $x \in V$, on a : $f'(x) = \sin x$, $g'(x) = 1+\tan^2 x$ et $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{\sin x}{1+\tan^2 x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $\boxed{\lim_{x\to 0} (1-\cos x)\operatorname{cotan} x = 0}$.*

4. *Une généralisation de la proposition* **??** *page* **??** *:*

(a) *On suppose que f est définie sur un voisinage V de $x_0 = 0$. Introduisons les fonctions :*

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - (f(0) + xf'(0)) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right. .$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur V, ces deux fonctions vérifient les quatre premières hypothèses de la règle de l'Hospital. De plus, si $x \in V \setminus \{x_0\}$ alors

$$\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \frac{1}{2}\frac{f'(x) - f'(0)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{f''(0)}{2}$$

car on reconnaît le taux d'acroissement de f' en 0. On en déduit, d'après la règle de l'Hospital, que

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f(x) - (f(0) + xf'(0))}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{f''(0)}{2}$$

et comme $f''(0) \neq 0$ alors $f(x) - (f(0) + xf'(0)) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{f''(0)}{2}x^2$.

(b) *On généralise ce résultat en considérant les fonctions :*

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \left(f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2}f''(0) + \cdots + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) \right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$$

et en effectuant un travail identique. On montre alors que :

$$\boxed{f(x) - \left(f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) \right) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.}$$

Références