Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1] and Alain Soyeur[2]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

29 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ **_Pas de titre_**

Pour $n \geqslant 2$*, on note* $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$*. Calculer les sommes suivantes :*

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} \quad (p \in \mathbb{Z}), \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k, \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|.$$

Solution :

— *La première somme est géométrique de raison* ω^p*. La raison est différente de* 1 *si et seulement si* p *n'est pas un multiple de* n*. Alors*

$$S_1 = \frac{\omega^{pn} - 1}{\omega^p - 1} = \boxed{0}$$

Si p *est un multiple de* n*, on trouve* $S_1 = n$*.*

— *La deuxième somme se calcule grâce à la formule du binôme :*

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega^k - \omega^n = (1+\omega)^n - 1 = \boxed{-2^n \cos^n \frac{\pi}{n} - 1}$$

en utilisant la factorisation par l'angle moitié

— *La troisième somme se calcule en remarquant que*

$$\left|\omega^k - 1\right| = 2\left|\sin \frac{k\pi}{n}\right| = 2 \sin \frac{k\pi}{n}$$

La première égalité est une conséquence de la factorisation de l'angle moitié et la seconde provient du fait que sinus est positif si $k \in [\![0, n-1]\!]$*. On introduit alors la somme* E *des exponentielles imaginaires correspondante que l'on calcule et finalement,*

$$E = 2\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} = 2\frac{e^{i\pi} - 1}{e^{i\frac{\pi}{n}} - 1} = \frac{2ie^{-\frac{i\pi}{2n}}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$$

$$S_3 = \operatorname{Im}(E) = \boxed{2 \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

Références