

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹ and Alain Soyeur²

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Pour $n \geq 2$, on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} \quad (p \in \mathbb{Z}), \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k, \quad S_3 = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|.$$

Solution :

— La première somme est géométrique de raison ω^p . La raison est différente de 1 si et seulement si p n'est pas un multiple de n . Alors

$$S_1 = \frac{\omega^{pn} - 1}{\omega^p - 1} = \boxed{0}$$

Si p est un multiple de n , on trouve $S_1 = n$.

— La deuxième somme se calcule grâce à la formule du binôme :

$$S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \omega^k - \omega^n = (1 + \omega)^n - 1 = \boxed{-2^n \cos^n \frac{\pi}{n} - 1}$$

en utilisant la factorisation par l'angle moitié

— La troisième somme se calcule en remarquant que

$$|\omega^k - 1| = 2 \left| \sin \frac{k\pi}{n} \right| = 2 \sin \frac{k\pi}{n}$$

La première égalité est une conséquence de la factorisation de l'angle moitié et la seconde provient du fait que sinus est positif si $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On introduit alors la somme E des exponentielles imaginaires correspondante que l'on calcule et finalement,

$$E = 2 \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} = 2 \frac{e^{i\pi} - 1}{e^{i\frac{\pi}{n}} - 1} = \frac{2ie^{-\frac{i\pi}{2n}}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$$

$$S_3 = \text{Im}(E) = \boxed{2 \cotan \left(\frac{\pi}{2n} \right)}$$

Références