Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \Pi_{k=1}^{5} (x-k) \end{array} \right. .$$

1. *Sans calculer f', montrer que f' s'annule entre 1 et 2, entre 2 et 3, entre 3 et 4 et entre 4 et 5.*
2. *En déduire que les seules racines de f' sont celles trouvées précédemment.*
3. *Tracer le graphe de f.*

Solution :

1. *La fonction f est dérivable (et donc continue) sur $[1,2]$ car polynomiale. De plus $f(1) = f(2) = 0$. D'après le théorème de Rolle, f' s'annule entre 1 et 2. On fait de même sur les trois autres segments.*
2. *Comme f est de degré 5, f' est de degré 4. Donc f' admet au plus 4 racines réelles. Les 4 racines trouvées dans la question précédente sont donc les seules racines de f'. On note α_i la racine de f' appartenant au segment $]i, i+1[$.*
3. *On en déduit facilement le tableau de variation suivant :*

x	$-\infty$		1		α_1		2		α_2		3		α_3		4		α_4		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On trace alors le graphe de f sans difficulté.

Références