Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Étudier la possibilité d'appliquer le théorème de Rolle aux intervalles et fonctions suivants :

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt[3]{x^2} \end{array} \right.$
2. $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1/\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$

Solution :

1. *La fonction f est continue sur $[-1,1]$ et $f(-1) = f(1)$. Elle est dérivable sur $]-1,1[\setminus \{0\}$ par opération sur les fonctions dérivables. Par contre, f n'est pas dérivable en 0. En effet, si $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ alors le taux d'accroissement de f en 0 est*

$$\Delta(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = x^{-\frac{1}{3}}$$

qui diverge quand $x \to 0$. On ne peut donc appliquer le théorème de Rolle à f.

2. *La fonction g est continue sur $]0,1/\pi]$ par opérations sur les fonctions continues. On vérifie facilement grâce au théorème des gendarmes que g est aussi continue en 0. Elle est dérivable sur $]0,\pi[$ et $g(0) = g(1/\pi) = 0$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle à g : il existe $c \in]0,\pi[$ tel que $g'(c) = 0$. On remarque que g n'est pas dérivable en 0.*

Références