Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dérivable. On suppose que* $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty$. *Montrer qu'il existe* $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Solution : *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Comme* $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty$, *il existe* $A > 0$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| > A \Rightarrow f(x) > f(x_0)$. *En particulier,* $x_0 \in [-A, A]$. *Sur le segment* $[-A, A]$, *la fonction* f *est continue et admet donc un minimum : il existe* $c \in [-A, A]$ *tel que pour tout* $x \in [-A, A]$, $f(x) \geqslant f(c)$. *Mais si* $x \in \mathbb{R} \setminus [-A, A]$, *on a* $f(x) \geqslant f(x_0) \geqslant f(c)$. *Par conséquent, la fonction* f *admet un minimum global sur* $\mathbb{R}$ *au point* c. *On sait alors que* $f'(c) = 0$.

Références