Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

7 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit une fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, non constante, dérivable à gauche et à droite en tout point. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'_d(c) f'_g(c) \leqslant 0$.

Solution : *La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes sur ce segment. Les deux bornes de f ne peuvent être atteintes en les extrémités de $[a,b]$ car comme $f(0) = f(1)$, f serait constante ce qui est contraire aux hypothèses. Une des deux bornes est donc atteinte en un point c intérieur au segment $[0,1]$. En ce point, les dérivées sont de signe contraire. En effet, supposons par exemple que c est un maximum alors, pour x dans un voisinage suffisamment petit à gauche de c, on a $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$ donc par passage à la limite dans une inégalité, $f'_g(x) \geqslant 0$. De même, pour x dans un voisinage suffisamment petit à droite de c, on a $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$ et donc $f'_d(x) \leqslant 0$. On en déduit le résultat. Si c est un minimum, on procède de manière analogue.*

Références