Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

29 juin 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit une fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dérivable sur* $[0,1]$. *On suppose que* $f(0) = 0$ *et que* $f(1)f'(1) < 0$. *Montrer qu'il existe* $c \in]0,1[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Indication 0.0 : *Faire un dessin, et s'inspirer de la démonstration du théorème de Rolle.*

Solution : f *est continue sur le segment* $[0,1]$. *Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Supposons par exemple que* $f(1) > 0$ *et* $f'(1) < 0$. *Soit* $M = f(c)$ *le maximum de* f *sur* $[0,1]$. *Montrons que* c *est un point* intérieur *de* $[0,1]$. *On a* $c \neq 0$ *car* $f(1) > 0$. *Si on suppose que* $c = 1$, *alors* $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant f(1)$ *mais alors* $\dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} \geqslant 0$ *et en passant à la limite dans les inégalités lorsque* $x \to 1$, *on aurait* $f'(1) \geqslant 0$, *ce qui est faux. Par conséquent,* $c \in]0,1[$. *Alors puisque* f *est dérivable au point* c *qui est un extrémum local* intérieur, *il vient que* $f'(c) = 0$.

Références