Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **_Pas de titre_**

On considère un réel $M > 0$ et une fonction $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g'(x)| \leqslant M$. Soit un réel $\varepsilon > 0$. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + \varepsilon g(x)$.

1. *Trouver une condition suffisante sur ε pour que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.*
2. *Montrez que si cette condition est remplie, la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.*

Solution :

1. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On calcule $f'(x) = 1 + \varepsilon g'(x) \geqslant 1 - \varepsilon M$. Par conséquent, si $M < 1/\varepsilon$, on est assuré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.*
2. *Dans ce cas, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J = f(\mathbb{R})$. Montrons que $J = \mathbb{R}$. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 1 - \varepsilon M$, en notant $k = 1 - \varepsilon M > 0$, on a $[f - kx]' > 0$ et donc la fonction $x \mapsto f(x) - kx$ est croissante sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant f(0) + kx$. Or $f(0) + kx \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et d'après le théorème de majoration, on en déduit que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.*
   De même, puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \leqslant 1+\varepsilon M$, en notant $k' = 1+\varepsilon M > 0$, on trouve que $\forall x \leqslant 0$, $f(x) \leqslant f(0) + k'x$. Mais puisque $f(0) + k'x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$, il vient que $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$. Donc $J =]-\infty, +\infty[$.

Références