Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1. *Montrez que la fonction* f *se prolonge par continuité sur* $\mathbb{R}$ *en une fonction* g.
2. *Etudiez la parité de la fonction* g.
3. *Etudiez les variations de la fonction* g *sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *et déterminez la limite* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
4. *On admet que* $g'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. *Qu'en déduit-on sur la dérivabilité de* g *en* 0 *? Tracer la courbe représentative de la fonction* g.

Solution :

1. *Remarquons d'abord que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$ *et que par conséquent,* $x + \sqrt{x^2+1} > x + |x| > 0$. *Donc la fonction* f *est définie sur* $\mathbb{R}^*$. *Pour* $x \neq 0$, *écrivons* f *sous forme exponentielle :*
$$f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$
Mais alors, lorsque $x \to 0$,
$$\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = \ln(1+(x+\sqrt{1+x^2}-1)) \underset{x\to 0}{\sim} (x+\sqrt{1+x^2}-1) \underset{x\to 0}{\sim} x$$
Donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} e$. *On peut prolonger la fonction* f *par continuité en* 0 *en posant*
$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ e & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$
2. *Soit un réel* $x > 0$. *En utilisant les quantités conjuguées,*
$$f(-x) = e^{-\frac{1}{x}\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)} = e^{-\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)} = f(x)$$
La fonction g *est donc paire et on l'étudiera sur* $[0,+\infty[$.

3. *On calcule pour $x \neq 0$:*

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x^2(\sqrt{x^2+1})}\left(x - \sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)$$

Il faut donc étudier le signe de

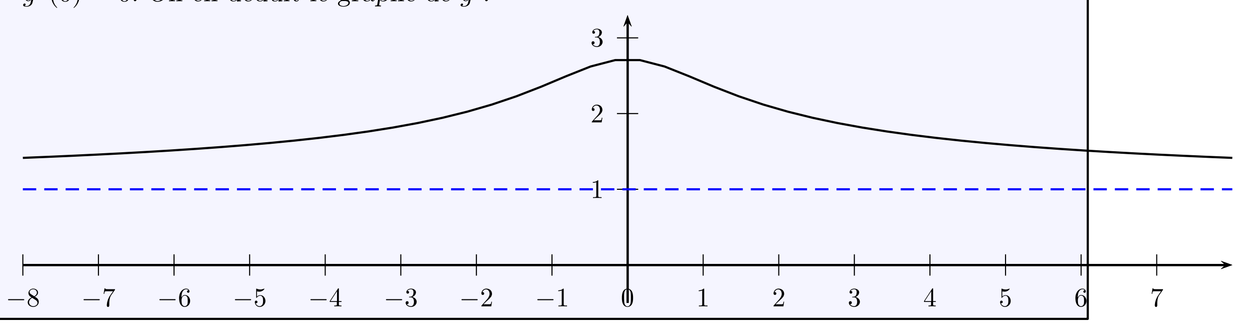
$$a(x) = x - \sqrt{x^2+1}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

Mais $a'(x) = -\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)x}{\sqrt{x^2+1}}$. *Comme* $x > 0$, $\sqrt{x^2+1}+x \geqslant 1$ *et le logarithme est positif. Donc* $a' < 0$ *sur* $]0,+\infty[$ *et puisque* $a(0) = 0$, *il vient que* $a < 0$ *sur* $]0,+\infty[$. *Par conséquent,* g *est strictement décroissante sur* $]0,+\infty[$. *Par ailleurs :*

$$g(x) = e^{\frac{1}{x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} = e^{\frac{1}{x}\left(\ln x + \ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^0 = 1$$

car $\ln x/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *et* $\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

4. *Si* $g'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *alors d'après le théorème du prolongement dérivable,* g *est dérivable en* 0 *et* $g'(0) = 0$. *On en déduit le graphe de* g *:*



Références