Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n(1-x)^n$. Calculer sa dérivée n ème et en déduire la valeur de la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Solution : *Posons $g : x \mapsto x^n$ et $h : x \mapsto (1-x)^n$ Rappelons que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $g^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$. On en déduit que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $g^{(n-k)}(x) = \frac{n!}{k!}x^k$ et que $h^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!}(1-x)^{n-k}$. En utilisant la formule de Leibniz, on trouve alors que :*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x)\, h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

Remarquons que $f^{(n)}$ est un polynôme de degré n. Le coefficient de son terme dominant est :

$$n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (-1)^k (-1)^{n-k} = (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = (-1)^n n! S_n$$

Comme la fonction f est une fonction polynomiale de degré $(2n)$ et de coefficient dominant $(-1)^n$, en la dérivant n fois, le coefficient de x^n dans $f^{(n)}(x)$ vaut aussi

$$(-1)^n (2n)(2n-1)\dots(n+1) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$$

On en déduit que $\boxed{S_n = \binom{2n}{n}}$.

Références