Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ *par*

$$f_n(x) = x^{n-1}\ln(x+1)$$

Déterminer $f_n^{(n)}(x)$ *en effectuant un raisonnement par récurrence.*

Solution : *Montrons par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in]-1,+\infty[$, $f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}\left[\frac{1}{(1+x)^n} - 1\right]$. *On vérifie facilement la propriété au rang 1. Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Supposons la propriété vraie au rang* $n-1$: $f_{n-1}^{(n-1)}(x) = \frac{(n-2)!}{x}\left[\frac{1}{(1+x)^{n-1}} - 1\right]$. *Remarquons que :* $f_n(x) = x f_{n-1}(x)$. *La fonction* f_n *est un produit de fonctions* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1,+\infty[$ *et elle est donc* $\mathcal{C}^\infty$. *On peut alors appliquer la formule de Leibniz et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :*

$$\begin{aligned}
f_n^{(n)}(x) = & \quad x f_{n-1}^{(n)}(x) + n f_{n-1}^{(n-1)}(x) \\
= & \quad -x\frac{(n-2)!}{x^2}\left(\frac{nx+1}{(1+x)^n} - 1\right) + n\frac{(n-2)!}{x}\left[\frac{1}{(1+x)^{n-1}} - 1\right] \\
= & \quad \frac{(n-2)!}{x}\left(-\frac{nx+n}{(1+x)^n} + \frac{n-1}{(1+x)^n} + 1 + \frac{n}{(1+x)^{n-1}} - n\right) \\
= & \quad \boxed{\frac{(n-1)!}{x}\left[\frac{1}{(1+x)^n} - 1\right]}
\end{aligned}$$

On termine en appliquant le principe de récurrence.

Références