Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère la fonction $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^{n-1} \ln x$ *où* $n \in \mathbb{N}^\star$. *Calculez* $f^{(n)}$

Solution : *La fonction* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *comme produit de fonctions* $\mathcal{C}^\infty$. *Notons* g *la fonction définie par* $g(x) = x^{n-1}$ *et* h *la fonction définie par* $h(x) = \ln(x)$. *D'après la formule de Leibniz, pour* $x > 0$,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$$

Mais on montre facilement que pour $k \leqslant n-1$,

$$g^{(k)}(x) = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} x^{n-1-k}$$

et que $g^{(n)} = 0$, *puis que* $\forall k \geqslant 1$,

$$h^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k}$$

Donc

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} x^{n-1-k} (-1)^{n-k-1} \frac{(n-k-1)!}{x^{n-k}} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x} \left[(1-1)^n - (-1)^n \right] \\ &= \boxed{\frac{(n-1)!}{x}} \end{aligned}$$

Références