Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Déterminer la dérivée n ème de la fonction

$$f(x) = x^2(1-x)^n$$

Indication 0.0 : *Écrire $(1-x)^n = (-1)^n(x-1)^n$ pour calculer les dérivées successives : cela évite les problèmes de signe !*

Solution : *Utilisons la formule de Leibniz :*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[x^2\right]^{(k)} \left[(1-x)^n\right]^{(n-k)}$$

Et puisque les dérivées de x^2 sont nulles pour $k \geqslant 3$, il ne reste que 3 termes dans cette somme :

$$f^{(n)}(x) = x^2[(1-x)^n]^{(n)} + 2nx[(1-x)^n]^{(n-1)} + n(n-1)[(1-x)^n]^{(n-2)}$$

Ensuite, en remarquant que $(1-x)^n = (-1)^n(x-1)^n$, on calcule les dérivées de $(x-1)^n$:

$$[(x-1)^n]^{(p)} = \frac{n!}{(n-p)!}(x-1)^{n-p}$$

et alors

$$f^{(n)}(x) = n!x^2(-1)^n + 2nx(-1)^n n!(x-1) + n(n-1)(-1)^n \frac{n!}{2}(x-1)^2$$

et après factorisation et simplification, on trouve que

$$\boxed{f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{2}\left[(n+1)(n+2)x^2 - 2n(n+1)x + n(n-1)\right]}.$$

On remarque que f étant un polynôme de degré $(n+2)$, sa dérivée n-ième est bien un polynôme de degré 2.

Références