Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

21 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Calculer la dérivée n-ième de :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$
4. $f_4 : x \mapsto x^2 e^x$
5. $f_5 : x \mapsto x^3 \ln x$
6. $f_6 : x \mapsto \sin x \cos x$.
7. $f_7 : x \mapsto e^x \sin x$.

Solution :

1. *Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \neq 1$:* $\boxed{f_1^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}}$.

   La formule est vraie au rang 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout $x \neq 1$ on ait$f_1^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ alors pour tout $x \neq 1$

   $$f_1^{(n+1)}(x) = \left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right)' = -\frac{-(n+1)\,n!}{(1-x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

   et la formule est encore vraie au rang $n+1$. On conclut en appliquant le théorème de récurrence.

2. *On montre de même que* $\boxed{f_2^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}}$ *pour tout $x \neq -1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

3. *On a, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$:* $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x}$ *donc :*

   $$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}\right) = \boxed{\frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right)}.$$

4. *On calcule facilement les deux premières dérivées de f. Si $n \geqslant 3$, on applique la formule de Leibniz en remarquant que les dérivées d'ordre $\geqslant 3$ de $x \mapsto x^2$ sont nulles, pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$f_4^{(n)}(x) = x^2 e^x + 2nxe^x + 2\frac{n(n-1)}{2}e^x = \boxed{\left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right)e^x}.$$

5. *On calcule facilement les trois premières dérivées de f_5. On montre aussi facilement par récurrence que la dérivée n ème de ln est $x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$. On remarque que les dérivées d'ordre $\geqslant 4$ de $x \mapsto x^3$ sont toutes nulles. On procède alors comme précédemment. La formule de Leibniz nous permet d'écrire pour tout $n \geqslant 4$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ que :*

$$\begin{aligned} f_5^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n-3}} + 3\frac{(-1)^n(n-2)!}{x^{n-3}} + 6\frac{(-1)^{n-1}(n - \\ &= (-1)^n x^{3-n}(n-4)!\left(-(n-1)(n-2)(n-3) + 3n(n-2)(n-3) - 3n(n-2)(n-3) + n(n-1)(n - \right. \\ &= (-1)^n n(n+1)(n-2)(n-4)! \end{aligned}$$

6. *Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après les formules de trigonométrie, $f_6(x) = \sin(2x)/2$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{f_6^{(n)}(x) = 2^{n-1}\sin(2x + n\pi/2)}$.*

7. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f_7(x) = e^x \sin x = \operatorname{Im}\left(e^{(1+i)x}\right)$. On sait dériver la fonction exponentielle complexe, voir la proposition **??** page **??**. Comme $\left(e^{(1+i)x}\right)^{(n)} = (1+i)^n e^{(1+i)x} = \sqrt{2}^n e^{\frac{in\pi}{4}} e^{(1+i)x}$, on en déduit que $f_7^{(n)}(x) = \boxed{\sqrt{2}^n \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)e^x}$.*

Références