Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (x^x)^x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

1. *Vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.*
2. *La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?*
3. *La fonction f est-elle deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$?*

Solution :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^{x^2 \ln x}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions dérivables. f est par ailleurs clairement dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$. Étudions la dérivabilité de f en 0. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\Delta(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{e^{x^2 \ln x} - 1}{x} \underset{x \to 0^+}{\sim} x \ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ car $x^2 \ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$. Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$. Il est clair que f est dérivable à gauche en 0 et que $f'_g(0) = 0$. f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. En résumé, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions continues. De plus, si $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = (2x \ln x + x) e^{x^2 \ln x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ par opérations sur les limites. Il est par ailleurs clair que si $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f'(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$. f' est donc continue sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
3. f' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions dérivables. En 0^+ :

$$\Delta(x) = \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{(2x \ln x + x) e^{x^2 \ln x}}{x} = (2 \ln x + 1) e^{x^2 \ln x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$$

par opérations sur les limites et car $x^2 \ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$. f n'est donc pas deux fois dérivable en 0.

Références