Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln\left(x^2\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. *Vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.*
2. *La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?*
3. *La fonction f est-elle deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$?*

Solution :

1. *La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables. De plus, si $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\left(\ln\left(x^2\right) + 1\right)$. En $x = 0$, le taux d'accroissement de f est donné par :*

$$\Delta(x) = \frac{x^2 \ln\left(x^2\right)}{x} = x \ln x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

   donc f est aussi dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
2. *La fonction f' est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus $f'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ car $x \ln x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ donc f' est aussi continue en 0. En conclusion, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*
3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x\left(\ln\left(x^2\right) + 1\right)$ donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions dérivables. Le taux d'accroissement de f' en 0 est donné par, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:*

$$\Delta(x) = \frac{2x\left(\ln\left(x^2\right) + 1\right)}{x} = 2\left(\ln\left(x^2\right) + 1\right) \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty$$

   et donc f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Références