Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★★ **Pas de titre**

On considère la suite (s_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par

$$s_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

1. *Montrez que la suite (s_n) est convergente.*
2. *On considère une fonction $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ dérivable au point 0 et telle que $f(0) = 0$. On définit pour tout $n \geqslant 1$ la suite (S_n) par*

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right)$$

   Montrer que la suite (s_n) converge.
3. *Étudiez les suites de terme général*

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \text{ et } v_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{1}{k+n}\right)$$

Solution :

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{3n+2}{2n(n+1)(2n+1)} < 0$ donc (s_n) est décroissante. Elle est positive donc minorée par 0. D'après le théorème de la limite monotone, (s_n) est donc convergente.*
2. *Posons $\lambda = f'(0)$. Le développement limité de f en 0 à l'odre 1 est donné, pour tout $x \in [0,1]$, par : $f(x) = \lambda x + x\varepsilon(x)$ où ε est une fonction définie sur un voisinage à droite de 0 telle que $\lim_{0^+} \varepsilon = 0$. On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $f(1/k) = \lambda/k + \varepsilon_k/k$ où $\varepsilon_k = \varepsilon(1/k)$. Remarquons que $\varepsilon_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$. Il vient alors :*

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right) = \lambda s_n + \sum_{k=n}^{2n} \frac{\varepsilon_k}{k}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que si $n \geqslant N$ alors $|\varepsilon_n| \leqslant \varepsilon$ Pour $n \geqslant N$, on a donc :

$$(\lambda - \varepsilon) s_n \leqslant S_n \leqslant (\lambda + \varepsilon) s_n.$$

Si $\lambda \neq 0$, on en déduit que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda s_n$ et donc que S_n converge vers λl où $l = \lim s_n$. Si $\lambda = 0$ alors il vient que $S_n = \underset{n\to+\infty}{o}(s_n)$ et comme (s_n) converge il en est de même de (S_n).

3. *Par application du résultat précédent, il est clair que (u_n) est convergente. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{1}{k+n}\right) = \sum_{k=n}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ et donc de la même façon, (v_n) est convergente.*

Références