Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

13 mai 2023

Exercice 0.1 ★★★ **Pas de titre**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$. Trouver la limite de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{2^k}{3^n}\right)$$

Indication : Utiliser le développement limité à l'ordre 1 de f en 0 : $f(x) = xf'(0) + x\varepsilon(x)$. L'idée est que pour x petit, « $f(x)$ ressemble à $xf'(0)$ ». La suite se comporte comme $f'(0)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{3^n} = f'(0)$.

Solution : *Écrivons le développement limité à l'ordre 1 de f en 0 :*

$$f(x) = xf'(0) + x\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = f'(0)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{3^n} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{3^n}\varepsilon\left(\frac{2^k}{3^n}\right) = f'(0) + v_n \text{ avec } v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{3^n}\varepsilon\left(\frac{2^k}{3^n}\right)$$

car d'après la formule du binôme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (1+2)^n = 3^n$.

Montrons que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Soit $\mu > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$, $|\varepsilon(x)| \leqslant \mu$. Comme la suite $\frac{2^n}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $\frac{2^n}{3^n} \leqslant \alpha$. Soit alors $n \geqslant N$. Puisque $\forall k \in [0, n]$, $0 \leqslant \frac{2^k}{3^n} \leqslant \frac{2^n}{3^n} \leqslant \alpha$, il vient que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \left|\varepsilon\left(\frac{2^k}{3^n}\right)\right| \leqslant \mu$$

Mais alors

$$|v_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{3^n} \left| \varepsilon\left(\frac{2^k}{3^n}\right) \right| \leqslant \mu \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k}{3^n} = \mu$$

Par conséquent, $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(0)}$.

Références