Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{array} \right.$$

Étudier la dérivabilité de f en $x_0 \in \mathbb{R}$.

Solution :

1. *Si $x_0 = 0$, formons le taux d'accroissement Δ de f en 0. Pour $x \neq 0$, on a :$\Delta(x) = (f(x) - 0)/x$ et donc $|\Delta(x)| \leqslant x^2/x \leqslant x$. On en déduit que $\Delta(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et que f est dérivable en 0. De plus $f'(0) = 0$.*
2. *Si $x_0 \neq 0$, montrons que f n'est pas dérivable en x_0 en montrant que f n'est pas continue en x_0. Comme $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels (r_n) et une suite d'irrationnels (q_n) qui convergent toutes deux vers x_0. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(r_n) = r_n^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0^2$ et $f(q_n) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Donc f n'est pas continue en x_0 et à fortiori f n'est pas dérivable en x_0.*

Références