Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue en $x_0 \neq 0$ et telle que la fonction $x \mapsto xf(x)$ soit dérivable en x_0. Montrer que f est dérivable en x_0.

Solution : *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. On écrit que :*

$$\frac{xf(x) - x_0 f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x[f(x) - f(x_0)] + f(x_0)[x - x_0]}{x - x_0} = x\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)$$

d'où l'on tire :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x}\left(\frac{xf(x) - x_0 f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right)$$

On passe ensuite à la limite dans cette relation lorsque $x \to x_0$, et on trouve, en utilisant que $x \mapsto xf(x)$ est dérivable en x_0 et que f est continue en x_0, que f est dérivable en x_0 avec

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{1}{x_0}((xf)'(x_0) - f(x_0))}$$

Références