

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Soit une fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ telle que $f(0) = 0$, $f \geq 0$ et

$$\forall x \geq 0, f'(x) \leq af(x) \quad (a > 0)$$

Montrer que la fonction f est nulle.

Solution : Introduisons la fonction auxiliaire

$$g : \begin{cases} [0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto e^{-ax} f(x) \end{cases}$$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et $\forall x \geq 0$, $g'(x) = e^{-ax}(f'(x) - af(x)) \leq 0$. Donc la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et on a $\forall x \geq 0$, $g(x) \leq g(0)$. Mais alors, si $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = e^{ax}g(x) \leq e^{ax}g(0) = e^{ax}f(0) = 0$. Comme la fonction f est positive, c'est la fonction nulle.

Références