

Dérivée symétrique en 0

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ Dérivée symétrique en 0

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. On dit que cette fonction possède une dérivée symétrique en 0 lorsque

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} \text{ existe et est finie.}$$

1. Si la fonction f est dérivable en 0, montrer qu'elle admet une dérivée symétrique en 0 et la calculer.
2. Si la fonction f admet une dérivée symétrique en 0, est-elle dérivable en 0?

Solution :

1. Calculons le développement limité à l'ordre 1 de f en 0 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Soit $h > 0$. En écrivant cette égalité pour $x = h$ et pour $x = -h$, en soustrayant et en divisant par $2h$, on trouve que

$$\frac{f(h) - f(-h)}{2h} = f'(0) + \frac{\varepsilon(h) + \varepsilon(-h)}{2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(0)$$

Donc la fonction f admet une dérivée symétrique en 0 qui vaut $f'(0)$.

2. La réciproque est fautive comme on le voit si $f(x) = |x| : \forall h \neq 0, \frac{f(h) - f(-h)}{2h} = 0$ donc f admet une dérivée symétrique en 0 mais n'est pas dérivable en 0 car $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$.

Références