Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient deux réels a et $x_0 > 0$. On définit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{si } x < x_0 \\ x^2+1 & \text{si } x \geqslant x_0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Trouver les valeurs de a et x_0 pour lesquelles f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Solution : *Par opérations sur les fonctions dérivables, la fonction f est dérivable sur $]0,x_0[$ et sur $]x_0,+\infty[$. Comme $\forall x > x_0$, $f'(x) = 2x \xrightarrow[x \to x_0]{} 2x_0$, la fonction f est dérivable à droite au point x_0 d'après le théorème du prolongement dérivable et $f'_d(x_0) = 2x_0$.*

Comme $\forall x < x_0$, $f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to x_0]{} \dfrac{a}{2\sqrt{x_0}}$, il vient que f est dérivable à gauche en x_0 et $f'_g(x_0) = \dfrac{a}{2\sqrt{x_0}}$.

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$, c'est-à-dire si et seulement si $\boxed{a = 4x_0\sqrt{x_0}}$.

Références