

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹ and Alain Soyeur²

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

16 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Soit ω une racine n -ième de l'unité différente de 1. On pose

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \omega^k.$$

Déterminer une valeur de S .

Indication 0.0 : On pourra calculer $(1-\omega)S$.

Solution :

$$\begin{aligned} (1-\omega)S &= (1-\omega) \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \omega^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) (\omega^k - \omega^{k+1}) \\ &= (1-\omega) + 2(\omega - \omega^2) + 3(\omega^2 - \omega^3) + \dots + n(\omega^{n-1} - \omega^n) \\ &= \underbrace{1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1}}_{=0} + n\omega^n \text{ par télescopage} \\ &= n \end{aligned}$$

et $S = \frac{n}{\omega-1}$.

Références