Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

30 juin 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}+1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2+x\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. *Prouver que f est continue en 0.*
2. *Étudier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$ en tout point x où f est dérivable.*

Solution :

1. *Il est clair que f est continue à gauche en 0. De plus, $2+x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 2 = f(0)$ donc f est aussi continue à droite en 0. En résumé, f est continue en 0.*
2. *f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions dérivables. Si $x<0$ alors $f'(x) = -e^{-x}$ et si $x>0$, $f'(x) = \ln x + 1$. On vérifie facilement que f est dérivable à gauche en 0. Par contre, comme $f'(x) = \ln x + 1 \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$, f n'est pas dérivable à droite en 0.*

Références