Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. *Prouver que f est continue en 0.*
2. *Étudier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$ en tout point x où f est dérivable.*

Solution :

1. *Il est clair que $1 - e^x \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$. Donc f est continue à gauche en 0. De plus, $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ et donc f est aussi continue à droite en 0. En résumé, f est continue en 0.*
2. *f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions dérivables. Si $x < 0$ alors $f'(x) = -e^x$ et si $x > 0$ alors $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$. De plus :*

$$\text{si } x < 0 : \quad \Delta(x) = \frac{1 - e^x}{x} \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{-x}{x} = -1 \xrightarrow[x \to 0^+]{} -1 \quad \text{et} \quad \text{si } x > 0 : \quad \Delta(x) = \frac{e^x - 1}{x(e^x + 1)} \underset{x \to 0^-}{\sim} \frac{x}{2x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} \frac{1}{2}$$

donc f est dérivable à gauche et à droite en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Références