Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

30 juin 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Pour chacune des fonctions suivantes :

1. *Déterminer son domaine de définition* D_f.
2. *Prouver que* f *est continue sur* D_f.
3. *Déterminer sur quel domaine* f *est dérivable.*
4. *Prolonger* f *par continuité là où c'est possible.*
5. *Vérifier si ce prolongement est dérivable.*

1. $f : x \mapsto \frac{x^4}{e^x-1}$
2. $f : x \mapsto x^x$.
3. $f : x \mapsto \cos\left(\sqrt{x}\right)$
4. $f : x \mapsto \sqrt{|x-1|}\sin x$.

Solution :

1. f *est définie et continue sur* $\mathbb{R}^*$. *De plus :* $\frac{x^4}{e^x-1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^4}{x} = x^3 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. *On prolonge alors* f *par continuité en* 0 *en posant* $f(0) = 0$. f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *par opérations sur les fonctions dérivables. Si* $x = 0$, *alors* $\Delta(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^3}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *donc* f *est dérivable en* 0 *et* $f'(0) = 0$.
2. $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$ *donc* f *est définie et continue sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Mais* $x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ *donc par opérations sur les limites* $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} e^0 = 1$. *On prolonge donc* f *par continuité en* 0 *en posant* $f(0) = 1$. f *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *comme composée de fonctions dérivables. En* $x = 0$, *on a :* $\Delta(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{e^{x\ln x} - 1}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{x\ln x}{x} = \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$, *l'équivalent étant valide car* $x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. f *n'est donc pas dérivable en* 0 *et le graphe de* f *admet en* 0 *une tangente verticale.*

3. *f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions dérivables. En $x = 0$, on a :* $\Delta(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{\frac{-x}{2}}{x} = -\dfrac{1}{2} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ *et f est dérivable en 0 avec de plus $f'(0) = -1/2$.*
4. *f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et en $x = 1$:* $\Delta(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sin x . \sqrt{|x-1|}}{x-1} \underset{x \to 1}{\sim} \sin 1 \dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x-1}$ *donc* $\Delta(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} +\infty$ *et* $\Delta(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} -\infty$. *$f$ n'est donc pas dérivable en 0.*

Références