Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Pour chacune des fonctions suivantes :

1. *Déterminer son domaine de définition D_f.*
2. *Prouver que f est continue sur D_f.*
3. *Déterminer sur quel domaine f est dérivable.*
4. *Prolonger f par continuité là où c'est possible.*
5. *Vérifier si ce prolongement est dérivable.*

1. $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
3. $f : x \mapsto \left(x^2-1\right) \arcsin\left(x^2\right)$
4. $f : x \mapsto |x| \operatorname{argth} x$

Solution :

1. f *est définie et continue sur* $\mathbb{R}^*$ *comme produit et composée de fonctions continues. En appliquant le théorème des gendarmes, on montre que* $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. *On prolonge alors* f *par continuité en* 0 *en posant :* $f(0)=0$. *Par opérations sur les fonctions dérivables,* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$. *Reste à étudier la dérivabilité en* 0. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$, $\Delta(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sin\dfrac{1}{x}$ *qui diverge quand* x *tend vers* 0. f *n'est donc pas dérivable en* 0.
2. *On montre comme précédemment que* f *est définie, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}^*$. *On montre aussi qu'on peut là encore prolonger* f *par continuité en* 0 *en posant* $f(0)=0$. *Pour ce qui concerne la dérivabilité en* 0 *on a, pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$, $\Delta(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *donc* f *est dérivable en* 0 *et* $f'(0)=0$.
3. f *est définie et continue sur* $[-1,1]$. *Par opérations sur les fonctions dérivables,* f *est dérivable sur* $]-1,1[$. *En* $x=1$, $\Delta(x) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\left(x^2-1\right)\arcsin\left(x^2\right)}{x-1} = (x+1)\arcsin\left(x^2\right) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \pi$. f *est donc dérivable en* $x=1$ *et* $f'(1)=\pi$. *Comme* f *est paire, on a aussi* $f'(-1)=\pi$.

4. *f est définie et continue sur $]-1,1[$. f n'est pas prolongeable par continuité en ± 1. f est dérivable sur $]-1,0[\cup[0,1]$ comme produit de fonctions dérivables sur ces intervalles. En $x=0$, $\Delta(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{|x| \operatorname{argth} x}{x} \underset{x \to 0}{\sim} |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ donc f est dérivable aussi en 0 et $f'(0)=0$.*

Références