Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer :

1. *son domaine de définition.*
2. *son domaine de dérivabilité.*
3. *sa dérivée.*

1. $f : x \mapsto \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$
2. $f : x \mapsto \frac{x+\ln x}{x+\ln^2 x}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{\arccos x}{\arcsin x}$
4. $f : x \mapsto (1+x)^x$
5. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{\operatorname{argsh} x}}{\ln(\operatorname{ch} x)}$
6. $x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos x+2)^4}$

Solution :

1. *f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable, par opérations sur les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x>0$:* $\boxed{f'(x) = \dfrac{1-x}{(x+1)^2\sqrt{x}}}$
2. *f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors* $\boxed{f'(x) = \dfrac{(x-1)\ln^2 x - 3x\ln x + x}{x\left(x+\ln^2 x\right)^2}}$
3. *f est définie et dérivable sur $]-1,-1[\setminus\{0\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus, si $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$:* $f'(x) = -\dfrac{\arcsin x + \arccos x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x} = \boxed{-\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}}$
4. *$f(x) = e^{x\ln(1+x)}$ et donc f est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$. Si $x \in]-1,+\infty[$,* $\boxed{f'(x) = \left(ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}\right)(1+x)^x}$.

5. *f est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et si* $x > 0$ *:* $\boxed{f'(x) = -\dfrac{-\operatorname{ch} x \ln(\operatorname{ch} x) + 2 \operatorname{argsh} x \operatorname{sh} x \sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}\left(\ln(\operatorname{ch} x)\right)^2 \operatorname{ch} x \sqrt{\operatorname{argsh} x}}}$

6. *f est définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$*. De plus, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = \dfrac{4 + 2\cos x - 3\cos^2 x}{(\cos x + 2)^5}}$.

Références