Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

En utilisant la définition, déterminer quand les fonctions suivantes sont dérivables et déterminer leur dérivée :

1. $f : x \mapsto x$.
2. $f : x \mapsto x^2$.
3. $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
5. $f : x \mapsto |x|$.
6. $f : x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

Solution :

1. *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et soit* $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x-a}{x-a} = 1 \xrightarrow[x \to a]{} 1$$

donc f *est dérivable en tout* $a \in \mathbb{R}$ *et* $\boxed{f'(a) = 1}$.

2. *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et soit* $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x-a} = x + a \xrightarrow[x \to a]{} 2a$$

donc f *est dérivable en tout* $a \in \mathbb{R}$ *et* $\boxed{f'(a) = 2a}$.

3. *Soit* $a \in \mathbb{R}_+$ *et soit* $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{a\}$.

$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \xrightarrow[x \to a]{} \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{a}} & \text{si } a > 0 \\ +\infty & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

donc f *est dérivable en tout* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *et dans ce cas* $\boxed{f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}}$. *Par contre* f *n'est pas dérivable en* 0.

4. *Soit* $a \in \mathbb{R}^*$ *et soit* $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{a\}$.

$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = -\frac{1}{ax} \xrightarrow[x \to a]{} -\frac{1}{a^2}$$

donc f *est dérivable en tout* $a \in \mathbb{R}^*$ *et* $\boxed{f'(a) = -\frac{1}{a^2}}$.

5. *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et soit* $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{|x| - |a|}{x - a}.$$

Si $a < 0$, *comme on va calculer la limite de* $\Delta(x)$ *quand* x *tend vers* a, *on peut supposer* $x < 0$ *et il s'ensuit que* $\Delta(x) = -1$ *donc* f *est dérivable en tout* $a \in \mathbb{R}_-^*$. *De plus* $\boxed{f'(a) = -1}$. *On montre de même que si* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *alors* f *est dérivable en* a *et* $\boxed{f'(a) = 1}$. *Par contre en* 0, $\Delta(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} -1$ *et* $\Delta(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} 1$. f *est alors dérivable à gauche et à droite en* 0 *mais n'est pas dérivable en* 0.

6. *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et soit* $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$. *En utilisant les formules de factorisation :*

$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} a^k \xrightarrow[x \to a]{} \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} = na^{n-1}$$

donc f *est dérivable en tout* $a \in \mathbb{R}$ *et* $\boxed{f'(a) = na^{n-1}}$.

Références