Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

On considère l'équation différentielle $(L): \quad x(x^2-1)y' + 2y = x^2$.

- *Résoudre* (L) *dans chacun des sous-intervalles* $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$, $I_3 =]0, 1[$ *et* $I_4 =]1, +\infty[$.
- *Existe-t-il des solutions de* (L) *définies sur* $\mathbb{R}$.

Solution :

- *Soit* $(N) \quad : \ y' + \dfrac{2y}{x\,(x^2-1)} = \dfrac{x^2}{x\,(x^2-1)}$. (N) *est définie sur* $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$. *Notons* (H) *l'équation homogène associée à* (N) *et introduisons la fonction* a : $\left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2}{x\,(x^2-1)} = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} \end{array}\right.$. *Pour tout* $k = 1, 2, 3, 4$, *une primitive de* a *sur* I_k *est donnée par :*

$$x \mapsto \ln \frac{|1+x|\,|x-1|}{x^2}.$$

Par conséquent, pour tout $k = 1, 2, 3, 4$, *les solutions de* (H) *sur* I_k *sont, par application du théorème de résolution des équations linéaires du premier degré, de la forme :*

$$\varphi_{\alpha_k} : \left\{\begin{array}{ccc} I_k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha_k \dfrac{x^2}{(x+1)\,(x-1)} \end{array}\right. \quad ; \alpha_k \in \mathbb{R}$$

Soit $k \in [\![1, 4]\!]$. *Déterminons une solution particulière de* (N) *sur* I_k *en utilisant la méthode de variation de la constante. On la cherche sous la forme* $x \mapsto \alpha\,(x)\, \dfrac{x^2}{(x+1)\,(x-1)}$ *où* α *est une fonction* $\mathcal{C}^1$ *sur* I_k. *On a :* $\alpha'\,(x)\, \dfrac{x^2}{(x+1)\,(x-1)} = \dfrac{x^2}{x\,(x+1)\,(x-1)}$ *c'est-à-dire* $\alpha'\,(x) = \frac{1}{x}$ *et donc on peut prendre* $\alpha\,(x) = \ln|x|$. *En résumé, pour tout* $k \in [\![1, 4]\!]$, *les* *solutions de* (N) *et donc de* (E) *sont, sur* I_k*, de la forme :*

$$\boxed{x \mapsto (\ln|x| + \alpha_k)\,\frac{x^2}{x^2-1}} \text{ où } \alpha_k \in \mathbb{R}$$

— *Cherchons s'il existe des solutions de* (E) *définies sur* $\mathbb{R}$*. Si une telle solution* φ *existe alors :*

1. φ *doit être continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$.
2. $\forall k \in [\![1,4]\!], \quad \exists \beta_k \in \mathbb{R} : \quad \varphi_{|I_k} = (\ln|x| + \beta_k)\,\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

Mais

$$\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^-} (\ln x + \beta_3)\,\frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{\ln x}{x-1} + \frac{\beta_3}{x-1}\right)\frac{x^2}{x+1}$$

qui n'est définie (et vaut $\frac{1}{2}$*) que si* $\beta_3 = 0$*. On montre de même que* $\lim\limits_{x\to 1^+} \varphi(x)$ *n'est définie que si* $\beta_4 = 0$*,* $\lim\limits_{x\to -1^+} \varphi(x)$ *n'est définie que si* $\beta_2 = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to -1^-} \varphi(x)$ *n'est définie que si* $\beta_1 = 0$*. De plus* $\dfrac{\ln|x|}{x^2-1} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$*. La fonction* φ *définie par :*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \ln|x|}{x^2-1} & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \pm 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est donc continue sur $\mathbb{R}$*. Montrons qu'elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$*. Soit* $x \in I$ *:*

— $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x-0} = \dfrac{x^2 \ln|x|}{x(x^2-1)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *donc* f *est dérivable en* 0 *et* $f'(0) = 0$.

—

$$\lim_{x\to 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{x^2 \ln x}{(x^2-1)} - \frac{1}{2}}{x-1} \underset{}{\overset{X=x-1}{=\!=\!=}} \lim_{X\to 0} \frac{2(X+1)^2 \ln(X+1) - (X+2)X}{2X^2(X+2)}$$

et, comme $\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \underset{X\to 0}{o}\left(X^2\right)$,

$$\frac{2(X+1)^2 \ln(X+1) - (X+2)X}{2X^2(X+2)} = \frac{1}{X+2} + \underset{X\to 0}{o}(1) \xrightarrow[X\to 0]{} \frac{1}{2}$$

f *est dérivable en* 1 *et* $f'(1) = \frac{1}{2}$.

— *On montre de même que* f *est dérivable en* -1 *et que* $f'(-1) = 0$.

On vérifie réciproquement que la fonction f *ainsi construite est solution de* (E) *sur* $\mathbb{R}$.

Références