

# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron<sup>1</sup>, Alain Soyeur<sup>2</sup>, and François Capaces<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

<sup>2</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

<sup>3</sup>, ,

28 janvier 2022

## Exercice 0.1 ★★★ Pas de titre

Etudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^n \left[ \sqrt{1 + \frac{k}{n(n+1)}} - 1 \right]$$

**Solution :** Utilisons le DL(0, 1) de  $\sqrt{1+u} = 1 + u/2 + o_{u \rightarrow 0}(u)$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il vient alors

$$\sqrt{1 + \frac{k}{n(n+1)}} - 1 = \frac{k}{2n(n+1)} + \frac{k}{n(n+1)} \gamma \left( \frac{k}{n(n+1)} \right) \quad \text{et} \quad \lim_0 \gamma = 0.$$

Donc

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{2} + k \gamma \left( \frac{k}{n(n+1)} \right) \right) = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{k}{n(n+1)} \gamma \left( \frac{k}{n(n+1)} \right)$$

et

$$\left| u_n - \frac{1}{4} \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n(n+1)} \left| \gamma \left( \frac{k}{n(n+1)} \right) \right|.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\lim_0 \gamma = 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que si  $|x| \leq \varepsilon$  alors  $|\gamma(x)| \leq \varepsilon$ . Par ailleurs, comme  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\frac{k}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc à partir d'un certain rang  $N$ , si  $n \geq N$  alors  $1/(n+1) \leq \eta$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\frac{k}{n(n+1)} \leq \eta$ .

Il vient alors pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  que  $\left| \gamma \left( \frac{k}{n(n+1)} \right) \right| \leq \varepsilon$  et on peut écrire :

$$\left| u_n - \frac{1}{4} \right| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{k}{n(n+1)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a ainsi montré que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1/4$ .

### Références