Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★★ **Pas de titre**

Etudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\sqrt{1 + \frac{k}{n(n+1)}} - 1 \right]$$

Solution : *Utilisons le* $DL(0,1)$ *de* $\sqrt{1+u} = 1 + u/2 + \underset{u \to 0}{o}(u)$. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, *il vient alors*

$$\sqrt{1 + \frac{k}{n(n+1)}} - 1 = \frac{k}{2n(n+1)} + \frac{k}{n(n+1)} \gamma\left(\frac{k}{n(n+1)}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{0} \gamma = 0.$$

Donc

$$u_n = \frac{1}{n\,(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{2} + k\gamma(\frac{k}{n(n+1)}) \right) = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n\,(n+1)} \gamma\left(\frac{k}{n(n+1)}\right)$$

et

$$\left| u_n - \frac{1}{4} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n\,(n+1)} \left| \gamma(\frac{k}{n(n+1)}) \right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. *Comme* $\lim_0 \gamma = 0$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que si* $|x| \leqslant \varepsilon$ *alors* $|\gamma(x)| \leqslant \varepsilon$. *Par ailleurs, comme* $k \in [\![1, n]\!]$ *:*

$$\frac{k}{n(n+1)} \leqslant \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Donc à partir d'un certain rang N, *si* $n \geqslant N$ *alors* $1/(n+1) \leqslant \eta$ *et pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{k}{n(n+1)} \leqslant \eta$. *Il vient alors pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$ *que* $\left| \gamma\left(\frac{k}{n(n+1)}\right) \right| \leqslant \varepsilon$ *et on peut écrire :*

$$\left| u_n - \frac{1}{4} \right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n\,(n+1)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a ainsi montré que $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/4}$.

Références