Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

14 mai 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Montrer que les suites suivantes (u_n) et (v_n), données par leur terme général, sont adjacentes :

$$u_n = n - \left(\cos 1 + \cos\frac{1}{2} + \cdots + \cos\frac{1}{n}\right) \quad \textit{et} \quad v_n = u_n + \sin\frac{1}{n}$$

Solution : *La suite (u_n) est clairement croissante et $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Reste à montrer que (v_n) est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule en utilisant les développements limités usuels :*

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \sin\frac{1}{n+1} - \sin\frac{1}{n} \\
&= n + 1 - n - \cos\frac{1}{n+1} + \sin\frac{1}{n+1} - \sin\frac{1}{n} \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{2(n+1)^2}\right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= \frac{n+2n(n+1)-2(n+1)^2}{2n(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= -\frac{n+2}{2n(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n+2}{2n(n+1)^2}
\end{aligned}$$

La suite $(v_{n+1} - v_n)$ est équivalente à une suite négative donc à partir d'un certain rang on a $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$. On montre ainsi que (v_n) est décroissante à partir d'un certain rang. Les deux suites sont bien adjacentes et elles convergent vers une même limite.

Références