Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère la suite de terme général :

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{e^x}{1+x^2} dx$$

Déterminer le $DL(0,3)$ *de* I_n*.*

Solution : *Remarquons que comme* $f : x \mapsto e^x/(1+x^2)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$*, elle admet, d'après le théorème fondamental, une unique primitive* F *sur* $\mathbb{R}$ *qui s'annule en* 0*. On calcule facilement que* $e^x/(1+x^2) = 1+x-\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ *donc par primitivation :* $F(x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$*. Il vient alors pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$I_n = F\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Références