Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

18 juin 2022

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Déterminer en utilisant les DLs les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}\right)$

Solution :

1.
$$\begin{aligned} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) &= n\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{1} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2} &= e^{n^2\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{n^2\ln\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)} \\ &= e^{n^2\ln\left(1-\frac{1}{6n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e^{-n^2\left(\frac{1}{6n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e^{-\frac{1}{6}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{e^{-\frac{1}{6}}} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
n^2\left((n+1)^{\frac{1}{n}}-n^{\frac{1}{n}}\right) &= n^2\left(e^{\frac{\ln(n+1)}{n}}-e^{\frac{\ln n}{n}}\right)\\
&= n^2 e^{\frac{\ln n}{n}}\left(e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}}-1\right)\\
&= n^2 e^{\frac{\ln n}{n}}\left(e^{\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}-1\right)\\
&= n^2 e^{\frac{\ln n}{n}}\left(\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= e^{\frac{\ln n}{n}}\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)\\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{1}
\end{aligned}$$

Références