Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Déterminer un équivalent des suites dont le terme général est donné par :

1. $u_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$
2. $u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
3. $u_n = \dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

Solution :

1. *On utilise le DL(0,1) de* exp *et le fait que* $\ln n/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Il existe des suites* $(\gamma_n), (\widetilde{\gamma}_n)$ *toutes deux convergentes vers* 0 *tels que :*

$$\begin{aligned}
(n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}} &= e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} - e^{\frac{\ln n}{n}} \\
&= 1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \gamma_n \frac{\ln(n+1)}{n+1} - 1 - \frac{\ln n}{n} + \widetilde{\gamma}_n \frac{\ln n}{n} \\
&= \frac{\ln n}{n+1} - \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(1+1/n)}{n+1} + \gamma_n \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \widetilde{\gamma}_n \frac{\ln n}{n} \\
&= -\frac{\ln n}{n(n+1)} + \frac{\ln(1+1/n)}{n+1} + \gamma_n \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \widetilde{\gamma}_n \frac{\ln n}{n}
\end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de voir que $\dfrac{\ln(1+1/n)}{n+1} \sim \dfrac{1}{n^2}$ *et donc* $\dfrac{\ln(1+1/n)}{n+1}$ *est négligeable par rapport au terme* $\dfrac{\ln n}{n(n+1)}$.

Mais qu'en est-il des autres termes ? Pour le savoir, il faut aller plus loin dans le développement limité. Mais auparavant, pour éviter les redites, notons que $\ln(n+1) - \ln n \sim \dfrac{1}{n}$.

$$\begin{aligned}
(n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}} &= e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} - e^{\frac{\ln n}{n}} \\
&= 1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{\ln^2(n+1)}{2(n+1)^2} + \varepsilon_n \frac{\ln^2(n+1)}{2(n+1)^2} - 1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{n^2} + \widetilde{\varepsilon}_n \frac{\ln^2 n}{n^2} \\
&= \frac{\ln n}{n+1} - \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(1+1/n)}{n+1} + \frac{\ln^2(n+1) - \ln^2 n}{2(n+1)^2} + \frac{\ln^2 n}{2(n+1)^2} - \frac{\ln^2 n}{2n^2} + \varepsilon_n \frac{\ln^2(n+1)}{2(n+1)^2} + \widetilde{\varepsilon}_n \frac{\ln}{}
\end{aligned}$$

Maintenant

— $\dfrac{\ln n}{n+1} - \dfrac{\ln n}{n} \sim -\dfrac{\ln n}{n^2}$.

— $\dfrac{\ln(1+1/n)}{n+1} \sim \dfrac{1}{n^2} = o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

— $\dfrac{\ln^2(n+1) - \ln^2 n}{2(n+1)^2} \sim \dfrac{\ln(n+1) + \ln n}{2n(n+1)^2} = o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

— *Bien entendu* $\varepsilon_n \dfrac{\ln^2(n+1)}{2(n+1)^2} = o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$ *et* $\widetilde{\varepsilon}_n \dfrac{\ln^2 n}{n^2} = o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

Finalement, on a bien $u_n \sim -\dfrac{\ln n}{n^2}$.

2. *Comme* $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ *et que* $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$, *on a :*

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} &= \sqrt{n}\left(2 - \sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) \\ &= \sqrt{n}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{1}{4}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} \end{aligned}$$

3. *Comme* $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ *et que* $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ *:*

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} &= \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{2}{\sqrt{n}}} \end{aligned}$$

Références