Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

25 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère la fonction définie par

$$f(x) = \arctan(x^2)\ln\left(2\sqrt{x}+1\right)$$

Trouver un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$ à la précision $1/\sqrt{x}$. En déduire une courbe asymptote simple et la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Solution : *Posons $X = 1/x$ et utilisons les développements limités usuels en 0^+ ainsi que la formule **??** page **??** :*

$$\begin{aligned}
f(X) &= \arctan\left(1/X^2\right)\ln\left(2/\sqrt{X}+1\right)\\
&= \left(\pi/2-\arctan X^2\right)\left(\ln 2+\ln\left(1+\sqrt{X}/2\right)-\ln\sqrt{X}\right)\\
&= \left(\pi/2 - X^2 + \underset{X\to 0^+}{o}\left(X^2\right)\right)\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\ln X + \frac{1}{2}X^{1/2} - \frac{1}{8}X + 1/24X^{3/2} - \frac{1}{64}X^2 + \underset{x\to 0^+}{o}\left(X^2\right)\right)\\
&= -\frac{\pi}{4}\ln X + \frac{\pi\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}\sqrt{X} + \underset{X\to 0^+}{o}\left(\sqrt{X}\right)
\end{aligned}$$

donc

$$f(x) = \frac{\pi}{4}\ln x + \frac{\pi\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{x}} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(1/\sqrt{x}\right)$$

La courbe d'équation $y = \frac{\pi}{4}\ln x + \frac{\pi\ln 2}{2}$ est donc asymptote et la courbe C_f est située localement au dessus.

Références