Pas de titre

Alain Soyeur[1] and Emmanuel Vieillard-Baron[2]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $1 + \dfrac{z+i}{z-i} + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3 = 0$
2. $(z+i)^n = (z-i)^n$

Solution :

1. *Soit z une solution de la première équation. On a nécessairement $z \neq i$ car i n'est pas une solution de l'équation. Posons $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$. Ce complexe vérifie $1 + Z + Z^2 + Z^3 = 0$. Remarquons que $Z \neq 1$ car il n'existe pas de complexe z tel que $\dfrac{z+i}{z-i} = 1$. Donc $1 + Z + Z^2 + Z^3 = \dfrac{1 - Z^4}{1 - Z}$ et Z vérifie : $1 - Z^4 = 0$. Le complexe Z est donc une racine quatrième de l'unité différente de 1, ce qui amène $Z = i, -1, -i$. On écrit ensuite que $z = i\dfrac{Z+1}{Z-1}$ et on trouve les trois solutions $\boxed{z = 1, 0, -1}$. On vérifie réciproquement que ces trois nombres sont solutions de l'équation.*
2. *Considérons maintenant une solution z de la deuxième équation. Comme précédemment, il est clair que $z \neq i$. Posons $U = \dfrac{z+i}{z-i}$. Il vient alors $U^n = 1$ et donc U est une racine n-ième de l'unité différente de 1 : $U = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$. On écrit alors que*

$$z = i\frac{U+1}{U-1} = i\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}$$

Après factorisation par l'angle moitié, on trouve que $\boxed{z \in \left\{\operatorname{cotan}\dfrac{k\pi}{n}; k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$. On vérifie réciproquement que ces nombres sont solutions de l'équation.

Références